The arguments at the core of [A4] have a lot in common with those in [A1]. An appendix to [A4] presents a tight estimate on the moments of exponential functionals for certain Lévy processes, including Brownian motion.

As the volume is going to press, a new paper ([GP]) has just appeared, and is likely to be related to A.4.

References.

[B] Bougerol, Ph., Exemples de théorèmes locaux sur les groupes résolubles. *Ann. Inst. H. Poincaré* **19** (1983), 369-391.

[GP] Gjessing, H. K., Paulsen, J., Present value distributions with applications to ruin theory and stochastic equations. *Stoch. Proc. and their App.* **71** (1997), 123-144. [**Added in proof**].

Sur l'identité de Bougerol pour les fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien avec drift

Larbi Alili, Daniel Dufresne et Marc Yor

Résumé. Dans cette note, nous donnons une démonstration simplifiée de l'identité de Bougerol. L'identité en question caractérise les lois de certaines fonctionnelles browniennes; de ce fait, elle apparaît dans différentes études sur ce sujet. Le raisonnement utilisé nous permet d'obtenir d'autres identités en loi introduisant des diffusions interessantes.

1. Introduction.

Depuis une dizaine d'années, l'étude des fonctionnelles exponentielles

$$(1) \qquad \int_0^t ds \exp(aB_s + bs)\,, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

associées à un mouvement brownien $(B_s,\ s \geq 0)$ a intéressé différents groupes de chercheurs, en particulier en mathématiques financières, où le mouvement brownien géométrique est le modèle le plus couramment utilisé, mais également dans de nombreuses études de phénomènes aléatoires en milieu aléatoire (voir, par exemple, Kawazu-Tanaka [5], Comtet-Monthus-Yor [4], et les références se trouvant dans ces articles).

Pour commencer notre discussion des lois des fonctionnelles exponentielles ci-dessus, fixons les paramètres a et b en (1) égaux à 2 et 0, respectivement. Alors la loi de la variable figurant dans (1) est caractérisée, pour t fixé, par l'identité de Bougerol [2]

$$\gamma\Big(\int_0^t ds \exp(2B_s)\Big) \overset{\text{(loi)}}{=} \sinh(B_t)\,, \tag{2}$$

où $(\gamma_u, u \geq 0)$ désigne un mouvement brownien issu de 0, indépendant de B. On peut écrire, de façon équivalente, l'identité (2) sous la forme

$$\int_0^t e^{B_s} d\gamma_s \overset{\text{(loi)}}{=} \sinh(B_t)\,. \tag{3}$$

L'objet de ce travail est de donner une démonstration et une extension de l'identité de Bougerol (2) (ou (3)) lorsque l'on remplace B, respectivement γ, dans le membre de gauche de (2) par $(B_t + \mu t,\, t \geq 0)$, respectivement $(\gamma_u + \nu u,\, u \geq 0)$.

Nous nous appuyons pour cela sur les deux remarques générales suivantes (voir Carmona-Petit-Yor [3] pour les applications à divers couples de processus à accroissements indépendants):

a) Soient (ξ_t) et (η_t) deux processus à accroissements indépendants, homogènes, issus de 0, indépendants l'un de l'autre; alors, le processus

$$\Big\{(\exp(\xi_t))\Big(x + \int_0^t \exp(-\xi_{s-})\, d\eta_s\Big),\ t \geq 0\Big\}$$

est un processus de Markov homogène;

b) Pour tous t et x fixés, l'égalité en loi suivante est satisfaite

$$\exp(\xi_t)\Big(x + \int_0^t \exp(-\xi_{s-})\, d\eta_s\Big) \overset{\text{(loi)}}{=} \exp(\xi_t)\, x + \int_0^t \exp(\xi_{s-})\, d\eta_s\,,$$

ce qui équivaut bien sûr à l'égalité en loi entre les variables bidimensionnelles

$$\Big(\exp(\xi_t),\ \exp(\xi_t)\int_0^t \exp(-\xi_{s-})\, d\eta_s\Big) \overset{\text{(loi)}}{=} \Big(\exp(\xi_t), \int_0^t \exp(\xi_{s-})\, d\eta_s\Big)\,.$$

2. Le cas particulier des mouvements browniens avec drift.

Dans ce paragraphe, nous prenons: $\xi_t = B_t + \mu t$, et $\eta_t = \gamma_t + \nu t$, avec B et γ deux mouvements browniens réels indépendants, issus de 0, et μ et ν deux réels.

La remarque générale faite dans le premier paragraphe peut maintenant être précisée comme suit

Proposition 1. *Le processus de Markov*

$$X_t^{\mu,\nu} \overset{\text{déf}}{=} (\exp(B_t + \mu t))\Big(x + \int_0^t \exp(-(B_s + \mu s))\, d(\gamma_s + \nu s)\Big)\,,$$

pour $t \geq 0$, a même loi que: $\sinh(Y_t^{\mu,\nu})$, $t \geq 0$, où $(Y_t^{\mu,\nu}, t \geq 0)$ est une diffusion de générateur infinitésimal

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2} + \Big(\mu \tanh(y) + \frac{\nu}{\cosh(y)}\Big)\frac{d}{dy}$$

issue de $y = \operatorname{Argsh}(x)$.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la formule d'Itô à chacun des deux processus $X^{\mu,\nu}$ et $\sinh(Y^{\mu,\nu})$.

REMARQUE. Il découle aisément des résultats du chapitre 1 de [6] que, pour $y = 0$, le processus $(Y_t^{1,0}, t \geq 0)$ a même loi que $(B_t + \varepsilon t, t \geq 0)$, où ε est une variable de Bernoulli symétrique, à valeurs dans $\{-1, +1\}$, indépendante de B.

Corollaire. *Pour t fixé, la loi de*

$$I_t^{\mu,\nu} \overset{\text{déf}}{=} \int_0^t \exp(B_s + \mu s)\, d(\gamma_s + \nu s)$$

est celle de $\sinh(Y_t^{\mu,\nu})$. En particulier, la loi de

$$\int_0^t \exp(B_s + s)\, d\gamma_s$$

est celle de $\sinh(B_t + \varepsilon t)$.

3. Une meilleure compréhension à l'aide du théorème de Girsanov.

3.1. Notons $P^{\mu,\nu}$ la loi du processus $\{Y_t^{\mu,\nu},\ t \geq 0\}$, sur l'espace canonique $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, où l'on note $Y_t(\omega) = \omega(t)$, et $\mathcal{F}_t = \sigma\{Y_s,\ s \leq t\}$. On a alors

$$P^{\mu,\nu}_{|\mathcal{F}_t} = D_t^{\mu,\nu}(Y) \cdot P_{|\mathcal{F}_t}\,, \tag{4}$$

où P désigne la mesure de Wiener, et

$$D_t^{\mu,\nu}(Y) = \exp\Big(\int_0^t \big(\mu \tanh(Y_s) + \frac{\nu}{\cosh(Y_s)}\big)\, dY_s - \frac{1}{2}\int_0^t ds\big(\mu \tanh(Y_s) + \frac{\nu}{\cosh(Y_s)}\big)^2\Big).$$

Dans la suite, il sera intéressant d'écrire cette densité de Radon-Nikodym sous la forme équivalente suivante

$$D_t^{\mu,\nu}(Y) = D_t^{\mu,0}(Y)\Delta_t^{\nu,\mu}(Y)\,,$$

où

$$D_t^{\mu,0}(Y) = \big(\cosh(Y_t)\big)^{\mu} \exp\Big(-\frac{\mu-\mu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{\cosh^2(Y_s)} - \frac{\mu^2}{2}\,t\Big)$$

et

$$\Delta_t^{\nu,\mu}(Y) = \exp\Big(\nu\, h_c(Y_t) + \nu\,\frac{1-\mu}{2}\int_0^t ds\,\frac{\sinh(Y_s)}{\cosh^2(Y_s)} - \frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{\cosh^2(Y_s)}\Big),$$

où l'on a posé

$$h_c(x) = \int_0^x \frac{dy}{\cosh(y)}\,.$$

En utilisant également la relation de Cameron-Martin pour passer de $(B_t + \mu\, t, \gamma_t + \nu\, t)$ à (B_t, γ_t), on obtient la relation suivante

$$E\Big(F\big(e^{B_s}\int_0^s e^{-B_u}d\gamma_u;\ s \leq t\big)e^{\mu B_t + \nu\gamma_t - (\mu^2+\nu^2)t/2}\Big) = E\big(F\big(\sinh(B_s);\ s \leq t\big)D_t^{\mu,\nu}(B)\big)\,, \tag{5}$$

pour toute fonctionnelle $F : C([0,t],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$, borélienne.

En faisant passer le terme $\exp(-(\mu^2+\nu^2)t/2)$ de la gauche vers la droite, on peut réécrire l'identité (5) sous la forme suivante

$$E\Big(F\big(e^{B_s}\int_0^s e^{-B_u}d\gamma_u; s \leq t\big)\exp(\mu B_t + \nu\,\gamma_t)\Big) = E\big(F\big(\sinh(B_s); s \leq t\big)\exp(\mu B_t' + \nu\, C_t')\big)\,, \tag{6}$$

où le couple de processus $(B_t', C_t'; t \geq 0)$ est défini comme suit

$$\begin{cases} B_t' = \displaystyle\int_0^t \tanh(B_s)\, dB_s + \int_0^t \frac{dC_s}{\cosh(B_s)} \\ C_t' = \displaystyle\int_0^t \frac{dB_s}{\cosh(B_s)} - \int_0^t \tanh(B_s)\, dC_s\,, \end{cases} \tag{7}$$

le processus $(C_t,\ t \geq 0)$ désignant un mouvement brownien auxiliaire indépendant de B. Remarquons que l'on a

$$d\begin{pmatrix} B_t' \\ C_t' \end{pmatrix} = \alpha(B_t)\, d\begin{pmatrix} B_t \\ -C_t \end{pmatrix}, \tag{8}$$

où α est la matrice de rotation suivante

$$\alpha(x) = \begin{pmatrix} \tanh x & -\dfrac{1}{\cosh x} \\ \dfrac{1}{\cosh x} & \tanh x \end{pmatrix}.$$

Le processus

$$\Big\{\begin{pmatrix} B_t' \\ C_t' \end{pmatrix}, t \geq 0\Big\}$$

est donc un mouvement brownien bi-dimensionnel.

Un examen un peu attentif de (6) amène, de façon naturelle, à la preuve de l'identité en loi entre les deux processus tri-dimensionnels présentés ci-dessous.

Proposition 2. (*On conserve les notations précédentes*). *Les deux processus suivants ont même loi*

$$\Big\{e^{B_t}\int_0^t e^{-B_u}d\gamma_u, B_t, \gamma_t;\ t \geq 0\Big\} \overset{(\text{loi})}{=} \big\{\sinh(B_t), B_t', C_t';\ t \geq 0\big\}. \tag{9}$$

Nous donnons maintenant deux démonstrations de ce résultat.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION. On montre facilement, par application de la formule d'Itô, que chacun des deux triplets est un processus de Markov, dont le générateur infinitésimal (sur $C^2(\mathbb{R}^3)$) est donné par

$$\frac{1}{2}(1+x^2)\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}+\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}+x\frac{d^2}{dxdy}+\frac{d^2}{dxdz}+x\frac{d}{dx}, \tag{10}$$

et on conclut grâce à l'unicité (en loi) des solutions du problème de martingales correspondant.

SECONDE DÉMONSTRATION. Elle nous semble plus intéressante (et un peu plus étonnante!). Admettons un instant l'identité en loi énoncée dans la proposition, et remplaçons dans l'expression: $e^{B_t}\int_0^t e^{-B_s}d\gamma_s$, le processus (B_s) par (B'_s), respectivement (γ_s) par (C'_s). On doit alors avoir, nécessairement

$$\sinh(B_t)=\exp(B'_t)\int_0^t e^{-B'_s}dC'_s\,. \tag{11}$$

En d'autres termes, (11) constitue une formule d'inversion partielle, relativement explicite, de la transformation (8) qui fait passer de

$$\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}\quad \text{à} \quad \begin{pmatrix}B'\\C'\end{pmatrix}.$$

Démontrons maintenant (11): posons

$$X'_t=\exp(B'_t)\int_0^t e^{-B'_s}dC'_s\,.$$

On a alors, par application de la formule d'Itô, et en utilisant les formules qui définissent B' et C' en fonction de B et C

$$\begin{aligned}X'_t=&\int_0^t dB_s\Big(\frac{X'_s\sinh(B_s)+1}{\cosh(B_s)}\Big)+\int_0^t dC_s\Big(\frac{X'_s}{\cosh B_s}-\tanh B_s\Big)\\&+\frac{1}{2}\int_0^t X'_s\,ds\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Considérons (12) comme une équation linéaire en X'; or, $(\sinh(B_t))$ est solution de cette équation (par application de la formule d'Itô); de plus, c'est l'unique solution, ce qui prouve (11).

Pour terminer, nous pouvons maintenant écrire complètement la transformation inverse

$$\begin{pmatrix}B'\\C'\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}B\\-C\end{pmatrix},$$

de la transformation (8). On a

$$\alpha^{-1}(x)=\begin{pmatrix}\tanh x & \dfrac{1}{\cosh x}\\ -\dfrac{1}{\cosh x} & \tanh x\end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{cases}B_t &=\displaystyle\int_0^t\Big(dB'_s\tanh(B_s)+\frac{dC'_s}{\cosh(B_s)}\Big),\\ -C_t &=\displaystyle\int_0^t\Big(dC'_s\tanh(B_s)-\frac{dB'_s}{\cosh(B_s)}\Big).\end{cases} \tag{13}$$

Or, nous venons de montrer la formule (11), ce qui nous permet d'écrire C en termes d'intégrales stochastiques faisant intervenir uniquement B' et C'

$$-C_t=\int_0^t\frac{-dB'_s+e^{B'_s}\Big(\int_0^s e^{-B'_u}dC'_u\Big)dC'_s}{\Big(1+e^{2B'_s}\Big(\int_0^s e^{-B'_u}dC'_u\Big)^2\Big)^{1/2}}\,. \tag{14}$$

Il serait intéressant d'obtenir, si possible, comme en (11) une formule plus simple...

3.2. A titre d'application, nous montrons maintenant comment la relation d'absolue continuité (4) ci-dessus permet de comparer les lois des couples

$$A_t\equiv\Big(\int_0^t ds\exp(2B_s),\,B_t\Big)\qquad\text{et}\qquad\Big(\int_0^t\frac{ds}{\cosh^2(B_s)},\,\sinh(B_t)\Big).$$

En appliquant conjointement la formule pour $\nu = 0$, et la remarque b) qui termine l'introduction, on obtient, pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}[f(\gamma_{A_t})\exp(\mu B_t)] \\ = \mathbb{E}\Big[f(\sinh B_t)\cosh^{\mu}(B_t)\exp\Big(-\frac{\mu-\mu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{\cosh^2(B_s)}\Big)\Big].$$

Ces deux espérances sont égales respectivement à:

- d'une part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\,\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2A_t}\Big)\exp(\mu B_t)\Big],$$

- d'autre part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,h_\mu(x,t) \\ \cdot\,\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\mu-\mu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{\cosh^2(B_s)}\Big)\Big|\sinh(B_t) = x\Big]$$

où

$$h_\mu(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,(1+x^2)^{(\mu-1)/2}\exp\Big(-\frac{(\operatorname{Argsh} x)^2}{2t}\Big).$$

On en déduit l'identité: pour tous x, μ réels,

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{\sqrt{A_t}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2A_t}\Big)\exp(\mu B_t)\Big] \\ = h_\mu(x,t)\,\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\mu-\mu^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{\cosh^2(B_s)}\Big)\Big|\sinh B_t = x\Big]. \tag{15}$$

Il est intéressant de noter que la formule (15) devient notablement plus simple lorsque $\mu = 0$ ou 1, et/ou $x = 0$.

La formule (15) pour $\mu = 0$ est la formule (1.e), p. 510, de [7], démontrée alors à l'aide de la relation de Lamperti exprimant $(\exp(B_t), t \geq 0)$ comme processus de Bessel 2-dimensionnel changé de temps au moyen de $(A_t, t \geq 0)$.

4. Appendice. Une interprétation géométrique à l'aide des coordonnées équidistantes dans le demi-plan de Poincaré.

Jean-Claude Gruet

Nous donnons ici une explication géométrique de la seconde démonstration de la Proposition 2, du moins quand $\nu = 0$. D'après le théorème de Girsanov, nous pouvons nous restreindre au cas particulier où $\mu = 1/2$.

Notre idée consiste à comparer l'écriture d'un mouvement brownien hyperbolique dans le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$, décomposé en coordonnées rectangulaires avec une écriture qui utilise les coordonnées équidistantes (Vinberg [8, p. 75-77]), moins connues que les coordonnées polaires hyperboliques ou les coordonnées horosphériques.

Proposition 2 bis. *Soient γ et B deux mouvements browniens linéaires issus de 0 et indépendants. Il existe deux mouvements browniens linéaires indépendants V et W et une diffusion R issue de 0 vérifiant l'équation*

$$dR_t = dW_t + \frac{1}{2}\tanh(R_t)\,dt$$

tels qu'avec la notation $\alpha(\cdot)$ de la Proposition 2,

$$\begin{pmatrix} d\gamma_t \\ dB_t \end{pmatrix} = \alpha(-R_t)\begin{pmatrix} dV_t \\ dW_t \end{pmatrix}.$$

Alors les deux processus tridimensionnels

$$\Big(\exp\Big(B_t+\frac{t}{2}\Big)\int_0^t \exp\Big(-B_s-\frac{s}{2}\Big)d\gamma_s,\, B_t,\, \gamma_t\Big) \quad \textit{et} \quad (\sinh(R_t),\, B_t,\, \gamma_t)$$

sont égaux.

a) Nous ne reprenons pas ici la construction du mouvement brownien hyperbolique en coordonnées rectangulaires, développée dans l'article suivant. Pour être cohérent avec les notations $X^{\mu,\nu}$ de la Proposition 1, quitte à changer de signe un mouvement brownien, les coordonnées rectangulaires (X_t, Y_t) d'un mouvement brownien hyperbolique sont maintenant les solutions du système

$$dX_t = Y_t\,d\gamma_t \qquad \text{et} \qquad dY_t = -Y_t\,dB_t \tag{a.1}$$

où $(\gamma_t,\, t \geq 0)$ et $(B_t,\, t \geq 0)$ sont des mouvements browniens linéaires indépendants.

Si la valeur initiale (X_0, Y_0) est $(0,1) = i$, on trouve

$$(X_t, Y_t) = \Big(\int_0^t \exp\Big(-B_s - \frac{s}{2}\Big)\, d\gamma_s,\, \exp\Big(-B_t - \frac{t}{2}\Big)\Big).$$

b) Définition des coordonnées équidistantes ([8]).

Rappelons d'abord qu'un faisceau hyperbolique de géodésiques dans le demi-plan de Poincaré est l'ensemble $\mathcal{F}$ des géodésiques orthogonales à une géodésique γ donnée. Les coordonnées polaires (respectivement: horosphériques) correspondraient à des faisceaux elliptiques (respectivement: paraboliques). On considère alors le faisceau $\mathcal{F}^\perp$ d'horocycles orthogonal à $\mathcal{F}$. On choisit un point p de γ et une orientation de γ.

Si M est un point quelconque de $\mathbb{H}$, il existe un unique élément de $\mathcal{F}$ passant par M. Soit P son intersection avec γ. On appelle r la distance hyperbolique entre M et γ, c'est à dire la longueur hyperbolique (positive ou nulle) de l'arc de géodésique de $\mathcal{F}$ reliant M et sa projection P sur γ. L'autre coordonnée u est la distance hyperbolique signée entre p et P sur la géodésique γ.

Si on prend pour simplifier $\gamma = i\,\mathbb{R}^+$, la géodésique verticale orientée vers le haut d'origine $p = i$, on obtient le faisceau constitué par les demi-cercles centrés en l'origine $(0,0)$. Le faisceau $\mathcal{F}^\perp$ orthogonal à $\mathcal{F}$ est formé des demi-droites issues de l'origine.

Grâce à un peu de géométrie, on obtient $u = \log(\sqrt{x^2+y^2})$ puisque la géodésique de $\mathcal{F}$ qui passe par (x,y) a pour rayon $\sqrt{x^2+y^2}$. Alors $\cosh(r) = \sqrt{x^2+y^2}/y$ et surtout

$$\sinh(r) = \frac{x}{y}\,. \tag{a.2}$$

Finalement,

$$x = \exp(u)\tanh(r) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\exp(u)}{\cosh(r)}\,, \tag{a.3}$$

formules qui ont un air de parenté évidente avec la première colonne de la matrice $\alpha(x)$. En outre, on obtient facilement que la métrique hyperbolique

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

s'exprime dans ces nouvelles coordonnées par

$$ds^2 = dr^2 + \cosh^2(r)\, du^2\,.$$

Alors le Laplacien hyperbolique

$$\Delta_{\mathbb{H}} = y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)$$

devient d'après (a.3)

$$\Delta_{\mathbb{H}} = \Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \tanh(r)\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\cosh^2(r)}\,\frac{\partial^2}{\partial u^2}\Big)\,. \tag{a.4}$$

Considérons maintenant les coordonnées (R_t, U_t) d'un mouvement brownien hyperbolique issu de i. D'après l'expression de la métrique riemannienne, il existe deux mouvements browniens linéaires indépendants $(V_t,\, t \geq 0)$ et $(W_t,\, t \geq 0)$ issus de 0 tels que

$$dR_t = dW_t + \frac{1}{2}\,\tanh(R_t)\, dt \qquad \text{et} \qquad dU_t = \frac{1}{\cosh(R_t)}\, dV_t\,. \tag{a.5}$$

Si on pose $Q_t = X_t/Y_t$, on obtient d'après l'équation précédente en R et (a.2),

$$dQ_t = \sqrt{1+Q_t^2}\, dW_t - Q_t\, dt\,.$$

En tenant compte du système (a.1), on en tire que

$$dW_t = \frac{Y_t\, d\gamma_t + X_t\, dB_t}{\sqrt{X_t^2+Y_t^2}}\,.$$

De même, en confrontant (a.1) et la seconde équation de (a.5), on obtient

$$dV_t = \frac{X_t\, d\gamma_t - Y_t\, dB_t}{\sqrt{X_t^2+Y_t^2}}\,.$$

Par conséquent, (dV_t, dW_t) est la transformée de $(dB_t, d\gamma_t)$ par une matrice orthogonale. En l'exprimant au moyen des nouvelles coordonnées (r,u), nous obtiendrions la matrice

$$\begin{pmatrix} dV \\ dW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tanh(R) & -\dfrac{1}{\cosh(R)} \\ \dfrac{1}{\cosh(R)} & \tanh(R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\gamma \\ dB \end{pmatrix}.$$

REMARQUES. Même si nous avions utilisé un mouvement brownien hyperbolique avec dérive (défini dans l'article suivant) ou une généralisation d-dimensionnelle des coordonnées équidistantes, où le rayon r reste défini par

$$\sinh(r) = \frac{x_1}{x_d},$$

nous aurions été incapable de faire apparaître un terme en $\nu/\cosh(r)$ dans la diffusion R. Par contre, nous pourrions atteindre d'autres valeurs de μ demi-entières.

References.

[1] Alili, L., Gruet, J. C., An explanation of a generalised Bougerol's Identity in terms of Hyperbolic Brownian Motion. In this volume.

[2] Bougerol, Ph., Exemples de théorèmes locaux sur les groupes résolubles. *Ann. Inst. H. Poincaré.* **19** (1983), 369-391.

[3] Carmona, Ph., Petit, F., Yor, M., On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. In this volume.

[4] Comtet, A., Monthus, C., Yor, M., Exponential functionals of Brownian motion and disordered systems. To appear in *Adv. Appl. Prob.* (1998).

[5] Kawazu, K., Tanaka, H., On the maximum of a diffusion process in a drifted Brownian environment. *Sém. Probas XXVII*, Lecture Notes in Maths. **1557** (1991), 78-85, Springer.

[6] Yor, M., *Some aspects of Brownian motion.* Part I, Lectures in Maths. E.T.H Zürich. Birkhäuser, 1992.

[7] Yor, M., On some exponential functionals of Brownian motion. *Adv. Appl. Prob.* **24** (1992), 509-531.

[8] Vinberg, E. B., *Geometry II, Spaces of constant curvature.* Encyclopædia of Math. Sciences. Vol. 29. Springer, 1993.

An explanation of a generalized Bougerol's identity in terms of hyperbolic Brownian motion

Larbi Alili and Jean-Claude Gruet

Abstract. In this paper, we state some new results about exponential functionals of Brownian motion, and give an explanation relying on the three dimensional hyperbolic Brownian motion.

0. Introduction.

The aim of this paper is to investigate some relationships between hyperbolic geometry and exponential functionals of Brownian motion, *i.e.* the random variables

$$A_t^{(\nu)} = \int_0^t ds \exp 2(B_s + \nu s), \tag{0.1}$$

where B_t is a linear Brownian motion started at 0; in the case $\nu = 0$, this functional is simply denoted A_t. More precisely, we generalize the following identity obtained by Bougerol [B] and valid for each fixed time $t \geq 0$

$$\sinh(B_t) \stackrel{(\text{law})}{=} \gamma_{A_t}, \tag{0.2}$$